平成２９年度九州大学大学院経済学府修士課程第二次募集入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ.

問 1 (1), (2) の中から１つを選んで解答せよ.

(1) $\boldsymbol{R}[x]_2$ を全ての高々2次の実数係数の多項式からなるベクトル空間とする. 今, $\boldsymbol{R}[x]_2$ から $\boldsymbol{R}[x]_2$ への変換 T を

$$T(f(x)) = \frac{d}{dx}(xf(x)) \qquad (\text{ただし } f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_2)$$

で定義する.

(a) $(T(1)\ \ T(x)\ \ T(x^2)) = (1\ \ x\ \ x^2)A$ を満たす行列 A を求めよ.

(b) $(T(1+x)\ \ T(x+x^2)\ \ T(x^2)) = (1+x\ \ x+x^2\ \ x^2)B$ を満たす行列 B を求めよ.

(c) $(1+x\ \ x+x^2\ \ x^2) = (1\ \ x\ \ x^2)P$ となる行列 P を求めよ. またその逆行列 P^{-1} が存在するならば, それを求めよ. 存在しない場合はその理由を記すこと.

(d) 自然数 n に対して, B^n を計算せよ.

(2) $a > 0$ に対して, 以下の立体 $D(a)$ について考える.

$$D(a) = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq a\right\}.$$

(a) $0 \leq x_0 \leq a$ とする. $x = x_0$ のときの $D(a)$ のグラフを (y, z) 平面に図示せよ.

(b) 次の積分 $f(a)$ を計算せよ.

$$f(a) = \iiint_{D(a)} \cos(x + y + z)\,dxdydz.$$

(c) 次の積分を計算せよ.

$$\iiint_{D(\pi)\cap D(\pi/2)^c} \cos(x + y + z)\,dxdydz.$$

ここで, $D(\pi/2)^c$ は $D(\pi/2)$ の補集合とする.

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 次の線形計画問題 (P) を考える. ただし, b_1, b_4, c_1, c_3 は適当な定数である.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{(P)} \quad \min & b_1x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & b_4x_4 & & & \\
\text{subject to} & -3x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & c_1, & \text{(式 1)} \\
 & x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & \geq & 2, & \text{(式 2)} \\
 & 2x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & & & \geq & c_3, & \text{(式 3)} \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & 3x_4 & \geq & -2, & \text{(式 4)} \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0. &
\end{array}$$

(a) (P) の双対問題 (D) を与えよ. 変数は y_1, y_2, y_3, y_4 を順に (式 1), (式 2), (式 3), (式 4) に対応させる形で用いること.

(b) $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/2, 0, 0, 1/2)$ が (P) の実行可能解であるとする. このとき, c_1 と c_3 が満たす関係式を与えよ.

(c) $\boldsymbol{y}^* = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 2, 0)$ が (D) の実行可能解であるとする. このとき, b_1 と b_4 が満たす関係式を与えよ.

(d) (b), (c) の $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ が最適値を与える解であったとする. このとき b_1, b_4, c_1, c_3 の値は定まるか. 定まるならばそれぞれ値を求めよ. 定まらない場合は, その理由を説明せよ.

(2) 2 つの紙飛行機の飛行時間を競うゲームを考える. 紙飛行機の飛行時間 T_1, T_2 は以下の確率分布に従う独立な非負の確率変数とする.

$$P[T_i \leq t] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_i t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

ここで $P[\cdot]$ は確率を意味し, λ_1, λ_2 は正の定数である. 1 つ目の紙飛行機を所有している人の得点は, 自然数 n を用いて以下の式によって計算されるものとする.

$$F(n) = (T_1 - (aT_2 + b))^n.$$

ここで a, b はゲームを公平に行うために設定された定数である. なお, $a > 0$ とする.

(a) 確率変数 $X = aT_2 + b$ の確率密度関数を求めよ.

(b) $x \geq b$, $w \in \boldsymbol{R}$ とする. $X = x$ の条件の下, $T_1 - (aT_2 + b) \leq w$ となる確率を求めよ.

(c) a, b は, T_1 と $aT_2 + b$ の期待値と分散が等しいように定められている. a, b を求めよ.

(d) (c) の a, b を用いて, $n = 1, 2, 3, 4$ の場合の得点 $F(n)$ の期待値をすべて求めよ.