平成30年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題 (一般選抜)

経済数学

次の2問の両方について解答せよ.

問1 (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ.

(1) m, n を自然数とし, tr は行列のトレース (trace) を表すものとする.

(a) A を $m \times n$ の行列, B を $n \times m$ の行列とする. $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$ を示せ.

(b) C, D, P を $n \times n$ の行列とする. P は正則であり,

$$P^{-1}CP = D$$

が成り立つとき, $\mathrm{tr}\, C$ と $\mathrm{tr}\, D$ との間にどのような関係があるか.

(c) $E = (e_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ を $n \times n$ の実対称行列とし, その n 個の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする. e_{ij} を用いて, 固有値の総和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ および2乗和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ を表わせ.

(2) a, b, c を定数とし, 次の広義の重積分を考える.

$$I(a,b,c) = \iint_{R^2} \exp\left\{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)\right\} dxdy.$$

(a) $I(1,0,1)$ は収束するか. 収束する場合はその値を求め, 収束しない場合は理由を記せ.

(b) $I(1,0,-1)$ は収束するか. 収束する場合はその値を求め, 収束しない場合は理由を記せ.

(c) $I(1,1,1)$ は収束するか. 収束する場合はその値を求め, 収束しない場合は理由を記せ.

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 半径 1 の円に内接する 3 角形の面積を考える. 2 つの内角を x と y とする.

(a) x, y が満たすべき条件を答えよ.

(b) この 3 角形の面積 $S(x, y)$ を求めよ.

(c) (a) で求めた条件の下で $S(x, y)$ の最大値を求めよ.

(d) (a) で求めた条件に加えて, $x + y \leq \pi/4$ を仮定する. この下での $S(x, y)$ の最大値を求めよ. .

(2) n を 2 以上の自然数とする. 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ の期待値, 分散および共分散はそれぞれ

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \quad \mathrm{V}(X_i) = \sigma^2, \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 \rho^{|i-j|} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

とする. ただし, $\sigma > 0$ であり, $|\rho| < 1$ である. 確率変数 S_n を次式によって定義する.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

以下では, 任意の実数 x について成り立つ次の等式を既知として用いてよい.

$$\sum\sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{j-i} = \frac{nx}{1-x} - \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}.$$

ここで, 左辺の和は $1 \leq i < j \leq n$ を満たす (i, j) についてとるものとする.

(a) 期待値 $\mathrm{E}(S_n)$ および分散 $\mathrm{V}(S_n)$ を求めよ.

(b) 確率変数 Y について, その期待値 $\mathrm{E}(Y)$ および分散 $\mathrm{V}(Y)$ が存在するとする. 任意の $t > 0$ に対して, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\Pr\left(|Y - \mathrm{E}(Y)| > t\sqrt{\mathrm{V}(Y)}\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

ここで, Pr は確率を意味する.

(c) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\Pr\left(\left|\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}(S_n)}{n^2\varepsilon^2}.$$

(d) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$