平成 30 年度九州大学大学院経済学府修士課程第 2 次募集入学試験問題 (一般選抜)

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ．

問 1 (1)，(2) の中から 1 つを選んで解答せよ．

(1) $A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とし，その固有多項式

$$p(t) = \det(tI_3 - A), \quad (t \in \boldsymbol{R})$$

を考える．ただし，I_3 は 3 次単位行列である．

(a) $p(t)$ の 2 次の項の係数を求めよ．

(b) $p(t)$ の定数項を求めよ．

(c) $p(t)$ の 1 次の項の係数を求めよ．ただし，A からその第 i 行と第 j 列を除いてできる 2 次正方行列を A_{ij} とする $(1 \leq i, j \leq 3)$.

(2) ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は次の広義積分によって定義される．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad (x > 0).$$

1 より大きい実数 p, q が次の等式を満たしているとする．

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(a) 任意の正の実数 t に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}.$$

(b) 任意の正の実数 u, v に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

(c) 任意の正の実数 t, x, y に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{t^{x/p+y/q}}{\{\Gamma(x)\}^{1/p}\{\Gamma(y)\}^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{t^x}{\Gamma(x)} + \frac{1}{q}\frac{t^y}{\Gamma(y)}.$$

(d) 任意の正の実数 x, y に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \{\Gamma(x)\}^{1/p}\{\Gamma(y)\}^{1/q}.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 次の 3 変数関数を考える.

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 8yz + 6zx, \quad (x, y, z \in \boldsymbol{R}).$$

(a) $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ とおく. ただし, 左肩の t は転置を意味する. 関数 $f(x, y, z)$ は, 対称行列 A を用いて 2 次形式

$${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$$

の形で表すことができる. 対称行列 A を求めよ.

(b) 原点を中心とする半径 1 の球面を S とし, 制約条件 $(x, y, z) \in S$ の下での $f(x, y, z)$ の極値問題を考える. この制約つき極値問題と (a) で求めた対称行列 A の固有値問題との関係について述べよ.

(c) 関数 $f(x, y, z)$ が S において最大値をとる点を (x^*, y^*, z^*) とする. 最大値および (x^*, y^*, z^*) を求めよ.

(d) 原点と (c) で求めた点 (x^*, y^*, z^*) を通る直線を L とし, 原点において L と直交する平面を P とする. P と S の共通部分における $f(x, y, z)$ の最大値を求めよ. また, 最大値をとる点を求めよ.

(2) 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立かつ同一の確率分布に従うとする. ただし, n は 2 以上の自然数であり, X_i の期待値および分散はそれぞれ $E(X_i) = \mu$ および $V(X_i) = \sigma^2$ とする $(1 \leq i \leq n)$. 次のように記号を定める.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

(a) $\bar{X}$ の期待値 $E\left(\bar{X}\right)$ および分散 $V\left(\bar{X}\right)$ を求めよ.

(b) $n, \mu, \bar{X}, S$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

を表せ.

(c) 期待値 $E(S)$ を求めよ.

(d) $\sqrt{E(S)}$ と $E(\sqrt{S})$ の大小関係について理由を付して述べよ.