

平成25年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の2問の両方について解答せよ。

問1 (1), (2)の中から1つを選んで解答せよ。

(1) 以下のような行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) A の固有値 α_1, α_2 (ただし $\alpha_1 \geq \alpha_2$) を求めよ。

(b) 以下を満たす P が存在するか。存在する場合は P を求めよ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad |P| = 3.$$

(c) A^n を計算せよ。

(2) 定義域が $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ である次の関数について考える。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + xy, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) 関数 f は $(0, 0)$ において連続か。理由を明確にして答えよ。

(b) f の D における最大値と最大値を与える点 (x, y) を求めよ。

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 以下の線形計画問題について考える.

$$\begin{array}{rllll} \min & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ \text{subject to} & & & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -1 \\ & x_1 & & & & - & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & \geq & -1 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) この問題の双対問題を求めよ (変数は y_1, y_2 などを用いよ).

(b) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ はこの問題の最適解であることを示せ.

(2) N 種類のカードがある. このカードに関連した以下のゲームについて考える.

- このゲームはくじを引いて, すべての種類のカードを集めることが目的のゲームである.
- 初めの持点を 10 点とする.
- くじを引くとカードが 1 枚もらえる. なお, 各カードのもらえる確率は等しく, 各回のくじの結果は独立とする.
- くじを 1 回引くごとに持点から x 点だけ減点される.
- すべての種類のカードが揃うと持点到 C 点が加算され, ゲームは終了する. なお, C は以下の定数である.

$$C = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

(a) $T_0 = 0$, T_n を n ($1 \leq n \leq N$) 種類目のカードが集まったときまでに引くくじの回数とする. $T_n - T_{n-1}$ の期待値を求めよ.

(b) ゲーム終了時の持点の期待値がゲーム開始時の持点と等しくなる x を求めよ.