平成２９年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ．

問 1 (1), (2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) 以下の行列 A, B を考える．ただし，x, y は変数，a, b, c はゼロでない定数である．

$$A = \begin{pmatrix} 2x-y & a & 0 \\ 0 & 2y-x & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2x-y & 0 & 0 \\ 0 & 2y-x & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(a) $AB = BA$ が成立するための x, y が満たす必要十分条件を求めよ．
以降では，x, y はこの条件を満たすものとする．

(b) 自然数 n に対して，B^n と $(A-B)^n$ を求めよ．

(c) $A = B + (A - B)$ を利用して，自然数 n に対して A^n を求めよ．

(2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$ について考える．

(a) 以下を満たす θ_1, θ_2 $(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$ が存在することを示せ．

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x\sin(\theta_1 x), \\ g(x) &= 1 + xe^{\theta_2 x}. \end{aligned}$$

(b) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \sin^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right).$$

(c) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(d) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 行列 M を以下で定義する.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この行列 M を用いて次の線形計画問題 (P) を考える. ただし, $\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 の適当な次元の列ベクトル, $\mathbf{0}$ はすべての要素が 0 の適当な次元の列ベクトル, z は変数, $\boldsymbol{x}$ は変数を表す列ベクトル, $^\top$ は転置を表す.

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \max & z \\ & \text{subject to} & z\mathbf{1} - M\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}, \\ & & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\ & & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

(a) (P) を以下の形に等価変形せよ (ここでの $\boldsymbol{x}$ は (P) のそれとは必ずしも一致しない). 必要ならば, 新たな変数を導入すること. なお, 形式は行列形式, 連立方程式形式いずれでも良い (以下, 同じ).

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

(b) (P) の双対問題を与えよ. またその問題を最大化問題の形で表せ.

(c) (P) の最適解は存在するか. 存在する場合, 理由を説明するとともにその解 (値と $\boldsymbol{x}$) を求めよ. 存在しない場合, その理由を説明せよ.

(2) 以下を満たす確率変数 X, Y について考える.

$$P[X = 1] = 1 - P[X = 0] = \frac{1}{4},\ P[Y = 1] = 1 - P[Y = 0] = \frac{3}{4}.$$

ここで, $P[A]$ は事象 A の確率を意味する. α は負の実数, β を正の実数, $Z = \alpha X + \beta Y$ として以下の設問に答えよ. なお, 以降では $P[X = 1,\ Y = 1] = x + 3/16$ とする.

(a) X, Y の期待値, 分散を求めよ.

(b) $P[X = 1,\ Y = 0]$, $P[X = 0,\ Y = 1]$, $P[X = 0,\ Y = 0]$ を x を用いて表せ.

(c) X と Y の相関係数 ρ を x を用いて表せ.

(d) X と Y が独立なとき, x を求めよ. また, このときに Z の期待値が 1/2, 分散が 3/8 となる α, β を求めよ.

(e) α, β は (d) で求めた値であったが, X と Y が独立でなかったため, Z の分散に誤差 ε が生じた. つまり,

$$\varepsilon = Z \text{ の真の分散} - \frac{3}{8}.$$

$\varepsilon < -1/8$ となる x は存在するか. 理由を明確にして答えよ.