平成２８年度九州大学大学院経済学府修士課程二次試験入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ．

問 1 (1), (2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) 2 つの 4 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

を用いて，$\boldsymbol{R}^4$ の部分集合 M を次のように定義する．

$$M = \{\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \mid \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\}.$$

また，$\boldsymbol{R}^4$ の部分集合 N を次のように定義する．

$$N = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{x} = 0\}.$$

ただし，$^\top$ は転置を表す．

(a) N の基底および次元を求めよ．

(b) $\boldsymbol{y} \in M$ ならば，$\boldsymbol{y}$ は任意の $\boldsymbol{x} \in N$ に対して $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} = 0$ を満たすことを証明せよ．

(c) $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^4$ が任意の $\boldsymbol{x} \in N$ に対して $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} = 0$ を満たすならば，$\boldsymbol{y} \in M$ であることを証明せよ．

(2) 次の 2 変数関数

$$f(x, y) = xy(1 - ax - by), \quad x, y \in \boldsymbol{R}$$

を考える．ただし，a, b は実数とする．

(a) $f(x, y)$ が極値を持つとする．このとき a と b が満たす条件を求めよ．

(b) $f(x, y)$ が極値 1/27 を持ったとする．その極値は極小値, 極大値, あるいはこれだけでは判定できない, のいずれであるか, 理由とともに述べよ．またこのとき, a, b が満たす条件を求め, それを ab 平面上に図示せよ．

問 2 (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ.

(1) 次の線形計画問題 (P) を考える.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(P)}\quad \max & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 0, \\
 & -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & -9, \\
 & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0, \\
 & & & & & x_3 & \leq & 0.
\end{array}
$$

(a) (P) を不等式標準形, 等式標準形に書き換えよ. 必要なら適当な変数を導入して良い (線形計画問題の不等式標準形, 等式標準形とはそれぞれ以下のような形式の問題とする. ただし A は行列, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ は列ベクトル, $^\top$ は転置を表す).

(不等式標準形)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

(等式標準形)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

(b) (a) で求めた不等式標準形に対して, 双対問題を与えよ.

(c) $(x_1, x_2, x_3) = (9/5, 0, -9/5)$ が (P) の最適解であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続型確率分布を考える. その累積分布関数 $F(x)$ は狭義単調増加とする.

(a) この確率分布からの無作為標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする. ただし $n \geq 2$ とする. 確率変数 Y を

$$Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

で定義する. $y \in \boldsymbol{R}$ に対して, 確率 $P(Y \leq y)$ を求めよ. 事象 $Y \leq y$ が事象「すべての $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $X_i \leq y$」と等価であることに注意せよ.

(b) 確率変数 Z を $Z = F(Y)$ で定義する. Z の確率密度関数が

$$g(z) = nz^{n-1} \quad (0 < z < 1)$$

であることを証明せよ.

(c) 期待値 $E[Z]$ を求めよ.