

平成18年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

つぎの2問から1問を選択し解答しなさい。

問1 問1を選択する場合は、(1),(2),(3)の中からさらに2つを選んで回答しなさい。

- (1) 成分がすべて実数である2次対称行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とする。 $\lambda_1 < \lambda_2$ とし、それぞれに対応する固有ベクトルを x_1, x_2 とする。
- (a) x_1, x_2 が直交することを示しなさい。
- (b) 設問の条件を満たす A の具体例をあげ、 $\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2$ を求めなさい。

- (2) 定数 a, b に対して、次の式は有限な極限值が存在するとする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x - ax - b}{x^2}$$

- (a) a, b を求めなさい。
- (b) 極限值を求めなさい。

- (3) つぎの線形計画問題を考える。

$$z = 2x_1 + 19x_2 + 7x_3 \rightarrow \min$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 12x_2 + 6x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 18x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

このとき、次の問に答えなさい。

- (a) 双対問題を作りなさい。
- (b) 相補性の条件を求めなさい。
- (c) 双対問題を解きなさい。
- (d) 上記の結果を用いて、もとの主問題の最適解を求めなさい。

問 2 問 2 を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに 2 つを選んで回答しなさい。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ x & w & z & y \\ y & z & w & x \\ z & y & x & w \end{vmatrix}$ を因数分解しなさい。

(2) 次数 $k (k > 0)$ のガンマ関数は、

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$$

で与えられる。このとき、次の問に答えなさい。

(a) $k > 1$ のとき、 $\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)$ となることを示しなさい。

(b) k が自然数とすれば、 $\Gamma(k) = (k-1)!$ となることを示しなさい。

(c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ となることが知られている。このことを用いて、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

となることを示しなさい。

(3) 勝てば 1 点、負ければ -1 点、引き分けで 0 点を獲得できるゲームがある。0 点から始めて n 回ゲームを行うとき、以下の 2 つのルールを選択できる。

ルール A n 回目に得点の合計が正ならば、賞金 $2C$ 円を獲得できる。

ルール B n 回目までに得点の合計が一度でも正になれば、賞金 C 円を獲得できる。

ここで、 C は自然数とする。各ゲームの結果は互いに独立とし、勝ち、負け、引き分けの確率はすべて $\frac{1}{3}$ とする。このとき、以下の問に答えなさい。

(a) $n = 2, 3$ のとき、獲得賞金の期待値は、ルール A とルール B のどちらを選択する方が大きいかを示しなさい。

(b) 一般の $n (\geq 4)$ において、獲得賞金の期待値は、ルール A とルール B のどちらを選択する方が大きいかを示しなさい。