平成19年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の2問から1問を選択し解答しなさい。

問1 問1を選択する場合は、(1),(2),(3) の中からさらに2つを選んで回答しなさい。

(1) まず、行列 $A = \begin{pmatrix} d & -1 & 0 \\ -1 & d & -1 \\ 0 & -1 & d \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。次に、この行列式が零でないとき、逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) f, g を $[0,\infty)$ 上の連続関数とする。$t \geq 0$ に対して $f(t) \geq 0,\ g(t) \geq 0$ であり、$g(t)$ は以下の不等式を満たす。

$$g(t) \leq \int_0^t f(s)g(s)ds$$

(i) 以下によって定義される $[0,\infty)$ 上の関数 u は、$t \geq 0$ に対して $u'(t) \leq 0$ を満たすことを示せ。

$$u(t) = e^{-\int_0^t f(s)ds} \int_0^t f(s)g(s)ds$$

(ii) $t \geq 0$ に対して、$g(t) = 0$ となることを示せ。

(3) c, d を実定数とするとき、次の最小化問題 (I),(II) を解け。

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \lambda^2 + (\lambda+\mu)^2 + \mu^2 - 4c\lambda - 4d\mu \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty \end{array}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{lll} \text{minimize} & x^2 + y^2 + z^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & x + y = c \\ & \text{(ii)} & y + z = d \\ & \text{(iii)} & -\infty < x, y, z < \infty \end{array}$$

問 2 問 2 を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに 2 つを選んで回答しなさい。

(1) 次の 3 次正方行列 A に関連する以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(i) A の固有値を求めよ。

(ii) 原点を除くすべての (x, y, z) で $kx^2 + ky^2 + kz^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ が負となる k の範囲を求めよ。

(2) $a > 0$ のとき、次の重積分 (I),(II) の値を求めよ。

$$\text{(I)} \qquad \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy \qquad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$\text{(II)} \qquad \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$$

(3) コインを n 回投げて表の出た回数を X_n、その標本平均を $Y_n (= X_n/n)$ とする。コイン投げの結果は互いに独立とし、表の出る確率を p $(0 < p < 1)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(i) h を $[0, 1]$ で連続かつ $(0, 1)$ で微分可能な関数とする。また、以下を満たす定数 C が存在するとする。

$$\sup_{0<x<1} |h'(x)| = C$$

平均値の定理を用いて、任意の正の数 ϵ に対して以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$P\left[\,|h(Y_n) - h(p)| \geq \epsilon\,\right] \leq C^2 \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

ただし、$P[A]$ は事象 A の確率を意味する。

(ii) ϵ を正の数とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,|\exp(Y_n) - \exp(p)| \geq \epsilon\,\right]$$