平成20年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

つぎの2問から1問を選択し解答しなさい。

問1 問1を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに2つを選んで回答しなさい。

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して、次の問いに答えよ。

(a) 固有値・固有ベクトルの対を2対求めよ。

(b) うまく行列 P を見つけて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

となるようにせよ。このとき、P と d, e を求よ。

(c) A の n 乗 A^n を求めよ(自然数 n で表せ)。

(2) 次の3つの積分の存在(収束・発散)を論じて、存在(収束)するものについてはその値を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

(3) 3変数 x, y, z がそれぞれ独立に1次元実数空間 R^1 上を動くとき、変量

$$(1-x)e^x + (1-y)e^{x+y} + (1-z)e^{x+y+z}$$

の最大値およびこの最大値を与える x, y, z の値を求めよ。すなわち、最大値問題

$$\max_{x,y,z}\,[(1-x)e^x + (1-y)e^{x+y} + (1-z)e^{x+y+z}]$$

を解け。

問 2　問 2 を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに 2 つを選んで回答しなさい。

(1)　任意の $m \times m$ の実対称行列 A が $A^2 = A$ を満たすとき、A はべき等（*idempotent*）であるという。このべき等行列 A について、次の問に答えよ。

(a) $\mathrm{I} - A$ もべき等であることを示しなさい。ここで I は $m \times m$ の単位行列である。

(b) A の固有値はすべて 0 または 1 となることを示しなさい。

(2)　$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく。

(a) I_0, I_1 を求めなさい。

(b) $n \geq 2$ のとき、部分積分して $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示しなさい。

(c) $n \geq 2$ が偶数の場合と、$n \geq 3$ が奇数の場合にわけて

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \dfrac{\pi}{2} & n \text{ が偶数} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

となることを示しなさい。

(3)　$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を未知の平均 μ と未知の分散 σ^2 の正規分布からのランダム標本とする。すなわち母集団分布の密度関数が

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x \in \mathrm{R}^1,\ \mu \in \mathrm{R}^1,\ \sigma^2 > 0)$$

で与えられるとき、次の問いに答えなさい。

(a) $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とするとき平均 $\mathrm{E}(\overline{X})$ と分散 $\mathrm{Var}(\overline{X})$ を求めなさい。

(b) 母数 μ と σ^2 の最尤推定量を求めなさい。