平成２１年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題 (一般選抜)

経済数学

次の２問から１問を選択し解答しなさい。

問 1 問 1 を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに 2 つを選んで回答しなさい。

(1) 次の $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 に関する以下の問に答えよ。

$$W_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}, W_2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

(a) $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{x} \in W_2\}$ は部分空間となることを示せ。

(b) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ。

(2) $a(>0)$ を定数として 2 変数関数 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ を考える。

(a) $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ を求め、z で表せ。

(b) さらに次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < a^2\}.$$

(3) X を確率変数、a, b を $a > b > 0$ を満たす定数とする。このとき、以下の問に答えよ。

(a) $E[|X|] < \infty$ のとき、$\lambda > 0$ に対して以下を示せ。

$$P[|X| \geq \lambda] \leq \frac{E[|X|]}{\lambda}.$$

ただし、$P[\cdot]$, $E[\cdot]$ はそれぞれ確率と期待値を意味する。

(b) $E[e^{a|X|}] < \infty$ のとき、以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{\lambda \to \infty} P[|X| \geq \lambda] e^{\lambda b}.$$

問 2 問2を選択する場合は、(1), (2), (3) の中からさらに2つを選んで回答しなさい。

(1) $(n+2)$ 変数 $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ の間に恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + l x_{n+1}^2 = a_{n+1}\left(x_{n+1} - \frac{x_n}{a_{n+1}}\right)^2 + a_n\left(x_n - \frac{x_{n-1}}{a_n}\right)^2 + \cdots + a_1\left(x_1 - \frac{x_0}{a_1}\right)^2 + a_0 x_0^2$$

が成り立つとき、係数列 $\{a_k\}_0^{n+1}$ が 値 l より、一意に定まる。このとき、次に答えよ。

(a) a_{n+1} を l で表せ。

(b) 各 $k\,(n \geq k \geq 0)$ に対して、 a_k を a_{k+1} で表せ。

(c) $n=5,\, l=1$ のとき、数列 $\{a_k\}_0^6$ を求めよ。

(2) 正の定数 a に対して次の関数を考える。

$$f(x) = e^{ax} - e^{-ax} \qquad x \in \mathrm{R}^1.$$

(a) f の導関数を求めよ。

(b) f の逆関数の導関数を求めよ。

(3) 確率変数 X が平均0、分散1の正規分布に従うとき、すなわち、X の確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad x \in \mathrm{R}^1$$

で与えられるとき、確率変数 $Y = X^2$ の確率密度関数 $g(y)$ を求めなさい。