

平成24年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の2問の両方について解答せよ。

問1 (1), (2)の中から1つを選んで解答せよ。

(1) 以下によって定まる数列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  について考える。

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

なお,  $A$  の固有値は  $-1$  と  $2$  であることが分かっている。

(a)  $a, b$  を求めよ。

(b) 以下を満たす  $P$  が存在するか。存在する場合は  $P$  を求めよ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c)  $x_1 = 0, x_2 = 1$  のとき,  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を求めよ。

(2) 以下の広義積分の値を計算せよ。

(a)

$$\int_0^x t^3 \log t \, dt.$$

ただし  $x > 0$  とする。

(b)

$$\iint_D (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

ただし  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ,  $a > 0$  とする。

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 以下の線形計画問題について, 設問に答えよ.

$$\begin{aligned} \min \quad & 9x_1 + 25x_2 + 8x_3 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) この問題の双対問題を求めよ.

(b) 上で求めた双対問題を解くことにより, この問題の最適値を求めよ.

(2) 表の出る確率が  $x$  ( $0 < x < 1$ ) であるコインがある. このコインを投げて, 表のときのみ  $x$  点を獲得できるゲームを  $n$  回行い, 合計得点を  $X_n$  とする. なお, コイン投げの結果は互いに独立とする. このとき以下の設問に答えよ.

(a) 1 回のゲームにおける得点の期待値と分散を求めよ.

(b)  $X_n$  の期待値  $E[X_n]$  と分散  $Var[X_n]$  を求めよ.

(c)  $x$  を  $0 < x < 1$  で動かしたとき, 以下の関数  $f(x)$  に最大値, 最小値は存在するか. 存在する場合は, その値と対応する  $x$  を求めよ.

$$f(x) = \frac{E[X_n]}{Var[X_n]}.$$