平成２６年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ.

問 1 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) $K \geq 2$ を自然数とし, $x_1, \ldots, x_K$ および $p_1, \ldots, p_K$ は

$$\sum_{i=1}^{K} x_i = n, \quad \sum_{i=1}^{K} p_i = 1, \quad p_k > 0 \ (1 \leq k \leq K)$$

を満たすとする. ただし, n は自然数である. $(K-1)$ 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{K-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{K-1} \end{pmatrix}.$$

また, $(K-1) \times (K-1)$ 行列 A の (i,j) 成分は

$$a_{ij} = n(p_i \delta_{ij} - p_i p_j)$$

で与えられるとする. ただし, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

(a) A^{-1} の (i,j) 成分が

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\delta_{ij}}{p_i} + \frac{1}{p_K}\right)$$

で与えられることを示せ.

(b) 次の等式を示せ. ただし, ^{t} は転置を意味する.

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i} = {}^t(\boldsymbol{x} - n\boldsymbol{p})A^{-1}(\boldsymbol{x} - n\boldsymbol{p}).$$

(2) k を自然数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x}$ を計算せよ.

(b) 次の広義積分を計算せよ.

$$\int_0^\infty x^{2013} e^{-x} dx.$$

(c) 次の広義積分を計算せよ.

$$\int_0^1 x \left(\log \frac{1}{x}\right)^{2013} dx.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 以下の線形計画問題 (P) について考える. ただし, a, b, c は定数とする.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(P)} & \min & -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
 & \text{subject to} & & - & ax_2 & - & x_3 & \geq & 2 \\
 & & x_1 & & & - & x_3 & \geq & b \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & \geq & c \\
 & & & & x_1, & & x_2, \; x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) (P) の問題の双対問題 (D) を与えよ. 変数は y_1, y_2 などを用いよ.

(b) (D) が (P) と等価となることはあるか. あるならばそれを実現する a, b, c の値を与え, そのときの (P), (D) の最適値をそれぞれ与えよ. ないならば, その理由を説明せよ.

(2) 連続型確率変数 X が区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上の一様分布に従っているとする.

(a) 確率 $P(X \leq x)$ を計算せよ. ただし, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とする.

(b) 新しい確率変数を $Y = \tan X$ によって定義する. 確率 $P(Y \leq y)$ を計算せよ. ただし, $-\infty < y < \infty$ とする.

(c) 確率変数 Y の確率密度関数を求めよ.

(d) 確率変数 Y の期待値は存在するか. 存在するならばそれを求め, 存在しないならばその理由を説明せよ.