平成２７年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ．

問１ (1)，(2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) 次の２変数関数 $f(x,y)$ について考える．

$$f(x,y)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -2 & y \\ 1 & x+2 & -2 & y \\ 1 & 2 & x-2 & y \\ 1 & 2 & -2 & x+y \end{vmatrix},\quad (x,y)\in \boldsymbol{R}^2.$$

(a) 上式の右辺の行列式を計算せよ．

(b) a を定数とする．１変数関数 $f(x,a)$ が $x=3$ で最小値をとる a は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は，a 及び最小値を求めよ．

(c) b を正の定数とする．１変数関数 $f(b,y)$ が $y=3$ で最小値をとる b は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は，b 及び最小値を求めよ．

(2) $a, b>0$ として，以下の領域 D について考える．

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\quad y\geq -\frac{\sqrt{3}b}{a}x,\quad y\geq 0\right\}.$$

この領域 D を極座標 (r,θ) に変換した領域を Ω とすると以下の等式が成立する．

$$\iint_D dxdy=\iint_\Omega r\,drd\theta.$$

(a) $b=a/3$ のとき，D，Ω のグラフをそれぞれ (x,y) 平面，(r,θ) 平面に描け．

(b) 積分の右式を累次積分の形に変形せよ．

(c) $a=b=1$ のとき，(b) の結果を用いて領域 D の面積を計算せよ．

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) ある惣菜店では，仕入れた 3 種の食材（トマト，キュウリ，キノコ）を使って 3 種のサラダ（野菜サラダ，チキンサラダ，シーフードサラダ）を販売することにした．それぞれのサラダ 100g 当たりに必要な食材の量，販売価格は以下の表のようになっている．

（単位: g）	トマト	キュウリ	キノコ	価格（円）
野菜	50	40	5	200
チキン	30	10	40	300
シーフード	10	50	20	400

仕入れたトマト，キュウリ，キノコの量はそれぞれ 5kg，5.5kg，4kg である．この量の範囲内でこれら 3 種の食材を使って 3 種のサラダを作り，売上げを最大にしたい．なお，他の材料は在庫や買い足すなどでまかなえるので，考えなくて良いこととする．また，作ったサラダは売れ残ることはないと仮定する．

(a) この問題を最適化問題として式により記述せよ．何故，そのような式を立てたのか説明すること．

(b) (a) で得られた最適化問題を等式標準形で書き直せ．

(c) (b) の問題を解いて，店の利益が最大になるためには，3 種のサラダをどのように作るべきかを決定せよ．また，そのときの売上げを求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E[X]$，分散 $V[X]$ をそれぞれ $-1, 1$ とする．このとき，確率変数 Y の期待値 μ，標準偏差 σ を推定するために，確率変数 $Z = X + 2Y$ について調査を行った．その結果，Z の期待値と分散が以下を満たすことが分かった．

$$1 \leq E[Z] \leq 3, \quad 3 \leq V[Z] \leq \frac{19}{4}.$$

なお，X と Y の相関係数は $1/2$ であることは分かっているとする．

(a) μ のとり得る範囲を求めよ．

(b) σ を用いて $V[Z]$ を表せ．

(c) σ のとり得る範囲を求めよ．

(d) 更なる調査で，$\mu - 4\sigma \geq 0$ となることが分かった．調査のすべての条件を満たす μ, σ は存在するか．存在する場合は，μ, σ とそれらに対応する $E[Z], V[Z]$ を求めよ．