平成２８年度九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ．

問１ (1)，(2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) 行列 A, P が以下で与えられたとする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ただし，λ は実定数である．また行列 B は以下により定義されている．

$$B = P^{-1}AP.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(a) n を自然数とする．A^n, B^n を求めよ．

(b) n 次正方行列 X に対して，

$$e^X = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

と定義する．ただし，E は n 次単位行列である．e^A を求めよ．

(c) e^B を求めよ．

(2) 次の広義積分を考える．

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} dx.$$

ただし，α は定数である．

(a) $\alpha = 1$ のとき，この広義積分は収束するか否か，理由とともに述べよ．

(b) $\alpha > 1$ のとき，この広義積分は収束するか否か，理由とともに述べよ．

(c) $\alpha < 1$ のとき，この広義積分は収束するか否か，理由とともに述べよ．

(d) この広義積分の値が $-\alpha^2$ となったとする．このときの α を求めよ．

28-1

問 2 (1), (2) の中から１つを選んで解答せよ.

（1）次の線形計画問題 (P1), (P2) を考える.

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(P1)} & \min & x_1 & & & & & & \\
\text{subject to} & & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \geq & 3, \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 3, \\
& & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P2)} & \min & -y_1 & - & y_2 & & \\
\text{subject to} & & -2y_1 & - & 4y_2 & \geq & -1, \\
& & 5y_1 & - & 2y_2 & \geq & 0, \\
& & -y_1 & + & y_2 & \geq & 0, \\
& & y_1 & + & y_2 & \geq & 0, \\
& & -2y_1 & + & 8y_2 & \geq & 0, \\
& & 5y_1 & + & 3y_2 & \geq & 0, \\
& & y_1 & \geq 0, & y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

（a）(P1) の双対問題 (D1) を与えよ. 変数は z_1, z_2 等を用いること.

（b）(P1), (P2), (D1) にはいずれも最適解が存在する. (P1) の最適値を α_1, (P2) の最適値を α_2, (D1) の最適値を β_1 とおく. (P2) と (D1) の制約条件, 目的関数の関係に注意し, α_1, α_2, β_1 の間に成り立つ関係式を与えよ.

（c）$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$, $(y_1, y_2) = (1/6, 1/6)$ はそれぞれ (P1), (P2) の実行可能解である. これらが共に最適解となっていることを示せ.

（2）連続型確率変数 X が次の確率密度関数をもつとする.

$$f(x) = K(a)e^{-ax} \quad (x > 0).$$

ただし, a は正定数, $K(a)$ は a によって定まる数である.

（a）$K(a)$ を求めよ.

（b）期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ.

（c）$M(t) = E[e^{tX}]$ とおく. $M(t)$ が存在するような実定数 t の範囲を求めよ. また, t がその範囲にあるとき $M(t)$ を計算せよ.

（d）次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ M\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^n .$$