

平成23年度九州大学大学院経済学府修士課程第2次募集入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の2問の両方について解答せよ。

問1 (1), (2)の中から1つを選んで解答せよ。

(1) $I_n = \int x^n \sin x \, dx$ ($n \geq 2$) とおく。このとき漸化式

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の関数

$$f(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} \quad (x \neq 0)$$

の最大値と最小値を求めよ。ただし、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり、 T は転置を意味する。

問2 (1), (2)の中から1つを選んで解答せよ。

(1) 条件 $2x^3 + y^3 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ のもとでの $x^2 + y^2$ の最大値, 最小値をラグランジュの未定乗数法によって求めよ。ただし最大値, 最小値が存在することはわかっているものとする。

(2) 中心を O とする半径 r の円内に, ランダムに2点 P, Q をとる。このとき次の問いに答えよ。

(a) OP の長さを p とするとき, p と p^2 の確率密度関数を求めよ。

(b) 三角形 OPQ の面積の期待値を求めよ。