平成２５年度九州大学大学院経済学府修士課程第２次募集入学試験問題(一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ.

問 1 (1), (2) の中から１つを選んで解答せよ.

(1) 関数 $1, x, x^2, x+2, x^2+2x+1$ で生成される実数係数多項式の実線形空間 V を考える. V の元 f, g に対して内積を以下のように定義する.

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(a) V の線形変換 T が以下を満たすとき, $T((x+1)^2)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} T(x+1) &= 1, \\ T(x^2+x) &= 2x+1, \\ T(x^2+1) &= 2x. \end{aligned}$$

(b) V の次元 $\dim V$ を求めよ.

(c) シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を作成せよ.

(2) a, b を正の定数, $f(x,y) = ax + by$, $g(x,y) = x^3 + y^3 - 1$ とする.

(a) $g(x,y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす (x,y) で $f(x,y)$ の最大値をとる点を求めよ.

(b) $(\alpha/(\alpha^3+\beta^3)^{1/3}, \beta/(\alpha^3+\beta^3)^{1/3})$ が $g(x,y)=0$ 上の点であることを利用し, 正数 α, β に関する以下の不等式を証明せよ.

$$a\alpha + b\beta \leq (\alpha^3+\beta^3)^{1/3}(a^{3/2}+b^{3/2})^{2/3}.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 以下の不等式が与えられたとする.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & \geq & 3 \\ & & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

(a) これらを満たす解が存在するかどうかを判定する問題を線形計画問題として定式化せよ.

(b) (a) で定式化した問題を解き, 解の存在性を判定せよ.

(2) サイコロを n 回投げて 1 の出た回数を X_n, その標本平均を $Y_n (= X_n/n)$ とする. 各サイコロ投げの結果は互いに独立とし, 1 以外の奇数の出る確率を $p > 0$, 偶数の出る確率を $q > 0$ とする. このとき以下の設問に答えよ. ただし, $p + q < 1$ とする.

(a) Y_n の期待値 $E[Y_n]$ と分散 $V[Y_n]$ を p, q を用いて表せ.

(b) 任意の正数 ϵ に対して以下の式 (大数の弱法則) を証明せよ.

$$\lim_{n \to \infty} P[|Y_n - 1 + p + q| > \epsilon] = 0.$$

ただし, $P[A]$ は事象 A の確率を意味する.