# 平成２７年度九州大学大学院経済学府修士課程第２次募集入学試験問題(一般選抜)

## 経済数学

次の２問の両方について解答せよ．

**問１** (1)，(2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) 以下の行列 $A$ と列ベクトル $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ について考える．

$$A = \begin{pmatrix} b & y & z & a \\ y & z & a & z \\ z & a & z & y \\ a & z & y & b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ただし，$a$, $b$ は正の定数であり，$\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ はすべて $A$ の固有ベクトルとする．

(a) $y$, $z$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ を求めよ．

(c) 以下を満たす直交行列 $U$ を１つ示せ．

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

(2) 以下の関数 $f$ について考える．

$$f(a) = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad D = \{(x,y) | x^2+y^2-2ax > 0, \ x^2+y^2-(a^2+2)x \leq 0\}.$$

なお，$f$ の定義域は $a \geq 0$ とする．

(a) $xy$-平面に $D$ を図示せよ．

(b) $D$ を極座標 $(r,\theta)$ に変換した領域を $\Omega$ とする．適当に $r$, $\theta$ の範囲を選択して，$\Omega$ を $r\theta$-平面に図示せよ．

(c) 右辺の積分を計算せよ．

(d) $f$ の最大値，最小値は存在するか．存在する場合は，その値と対応する点を求めよ．

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 次の式で定まる曲線を $C$ とする.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)=c.$$

$(x,y)$ が曲線 $C$ 上を動くとする. このとき, 次の関数 $f$ の最大値, 最小値について考える.

$$f(x,y)=\frac{(x-x_0)^2}{4}+(y-y_0)^2.$$

ただし, $x_0$, $y_0$, $c$ は定数とする.

(a) ラグランジュの未定乗数法を用いて, $(a,b)$ で関数 $f$ が極値をとるための必要条件を示せ. また, 必要条件を満たす点 $(a,b)$ をすべて求めよ.

(b) $k$ を定数とする.

i. $c\geq 0$ として, $k>c$ のとき, $f(x,y)=k^2$ と曲線 $C$ を $xy$-平面に図示せよ.

ii. $c<0$ として, $k>-c$ のとき, $f(x,y)=k^2$ と曲線 $C$ を $xy$-平面に図示せよ.

(c) $f$ の最大値と最小値は存在するか. 存在する場合は, その値と対応する点を求めよ.

(2) 実数 $a$, 自然数 $n$ に対して以下の確率変数 $Z_{a,n}$ を考える.

$$Z_{a,n}=aX+\sum_{k=1}^{n}Y_k.$$

ここで, $X$ は期待値 0, 分散 1 の確率変数, $\{Y_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は確率 $p$ で 1, 確率 $1-p$ で 0 の値をとる確率変数の列とする. また, $X$, $Y_1$, $Y_2$, ... は互いに独立とする.

(a) $p=1/4$ のとき, $Z_{a,n}$ の期待値が 10 となる $a$, $n$ は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は $a$, $n$ を求めよ.

(b) $p=1/2$, $n=10$ のとき, $Z_{a,n}$ の分散が 10 となる $a$ は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は $a$ を求めよ.

(c) $p=3/4$ のとき, $X$ と $Z_{a,n}$ の共分散が 10 となる $a$, $n$ は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は $a$, $n$ を求めよ.

(d) $0<p<1$ を満たすとする. $X$ と $Z_{a,n}$ の相関係数を $\rho_{a,n}$ とする. $n\to\infty$ のとき, $\sqrt{n}\rho_{a,n}$ の極限値を求めよ.