2020（令和 2）年度 九州大学大学院経済学府修士課程入学試験問題（一般選抜）

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ．

問 1 (1)，(2) の中から 1 つを選んで解答せよ．

(1) 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ および $\mathbf{0}_3$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ただし，t は実数である．また，3×3 行列 X を $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ によって定義する．

(a) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立になるのは t がどのような値のときか答えよ．

(b) $\boldsymbol{c}$ を 3 次元列ベクトルとする．$X^\top$ が正則であるかどうかにかかわらず，$X^\top X\boldsymbol{c} = \mathbf{0}_3$ ならば，$X\boldsymbol{c} = \mathbf{0}_3$ であることを示せ．ただし，右肩の添え字 $\top$ は転置を意味する．

(c) 行列 $X^\top X$ が正則になるのは t がどのような値のときか答えよ．

(2) 次の問に答えよ．ただし，a は正定数とする．

(a) 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の xz 平面上の曲線 $z = (x-a)^2$ $(x \geq 0)$ を z 軸の周りに回転させた曲面が次のように書けることを示せ．

$$z = \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2.$$

(b) 次の関数 f の極値を求めよ．

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 三角形 ABC において, 3 つの辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし, 三角形の内部の点 D から, 3 本の直線 BC, CA, AB へ下した垂線の長さをそれぞれ x, y, z とする. また, この三角形の面積を S とおく.

(a) x と y の取りうる範囲を求めよ.

(b) $x^2 + y^2 + z^2$ の極小値を求めよ.

(c) (b) で求めた極小値が最小値になっていることを示せ.

(d) xyz の最大値を求めよ.

(2) n を自然数とする. また, $p \in (0,1)$, $t \in \boldsymbol{R}$ および $\lambda > 0$ を定数とする.

(a) 確率変数 X は 2 項分布 $\mathrm{Bin}(n,p)$ に従っているとする. 確率関数は

$$p_X(x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}, \quad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

である. 期待値 $E[\exp(tX)]$ を求めよ.

(b) 確率変数 Y はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従っているとする. 確率関数は

$$p_Y(y) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!}, \quad (y = 0, 1, \ldots)$$

である. 期待値 $E[\exp(tY)]$ を求めよ.

(c) 確率変数 Z_n は 2 項分布 $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ に従っているとする. ただし, $n > \lambda$ とする. 極限 $\lim_{n\to\infty} E[\exp(tZ_n)]$ を求めよ.