2023（令和５）年度 九州大学大学院経済学府修士課程第 II 期入学試験問題 (一般選抜)

経済数学

次の２問の両方について解答せよ.

問１ (１), (２) の中から１つを選んで解答せよ.

(１) 実数を成分とする 20 行 23 列の行列全体の空間を $M_{20\times 23}$ とする. 以下の関数 f について考える.

$$f(A,B) = tr\left(A^tB\right), \quad A, B \in M_{20\times 23}.$$

ここで, tr は行列のトレース（対角成分の総和）, ${}^tB$ は B の転置行列を表す記号である.

(a) $f(A,B) = f(B,A)$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しなければ反例を示せ.

(b) $f(A,A) + f(B,B) = f(A+B, A+B)$ が成立する必要十分条件は $f(A,B) = 0$ である. この主張が正しければ証明し, 正しくなければ反例を示せ.

(２) 以下の関数 $f(z)$ について考える.

$$f(z) = \iint_{(x,y)\in D} \left(x^2 - e^z y^2\right) dxdy, \quad z \in \boldsymbol{R}.$$

ただし,

$$D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | x^2 + y^2 \leq x\}.$$

(a) $f(0)$ を計算せよ.

(b) $f(z)$ に最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合はその値とその値を与える点を求めよ.

(c) $f(z)$ に上限, 下限は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は求めよ.

(d) $f(z) = 0$ となる実数 z は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は求めよ.

問 2 (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ.

(1) 以下の関数 $f(x,y)$ について考える.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad (x,y) \in D.$$

ここで D は $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする. なお, 以下で r は正の定数とする.

(a) $D = \boldsymbol{R}^2$ のとき, $f(x,y)$ の極値と極値を与える点を求めよ.

(b) $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ のとき, $f(x,y)$ の最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合はその値とその値を与える点を求めよ.

(c) $D = \{(x,y) | x^2 \leq r^2,\ y^2 \leq r^2\}$ のとき, $f(x,y)$ の最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合はその値とその値を与える点を求めよ.

(2) サイコロを n 回投げて, 1の目が出た回数によって得点が決まるゲームを考える. 2人で競うため, 2つのサイコロ A, B を用意して, 以下のルールで得点を計算する.

- A を用いたとき, 1の目が出た回数を X_n とし, X_n をそのまま得点として用いる.
- B を用いたとき, 1の目が出た回数を Y_n とし, Y_n を1変数関数 f で変換した $Z_n = f(Y_n)$ を得点として用いる.

各回, 各サイコロ投げの結果は互いに独立とし, A, B の1の目が出る確率をそれぞれ $1/6$, p とする. なお, p は $0 < p < 1$ を満たす定数である.

(a) X_n の平均と分散を求めよ.

(b) $n = 2$, $f(y) = y^2$ のとき, Z_n の平均と分散を p を用いて表せ.

(c) A と B のどちらのサイコロを用いるかによって, 有利, 不利が生じないように得点の平均と分散を一致するようにしたい. そのような f は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は f の具体例を1つ示せ.