2024（令和6）年度 九州大学大学院経済学府修士課程第Ⅰ期入学試験問題
（一般選抜）

# 経 済 数 学

次の2問の両方について解答せよ．

**問1** (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ．

(1) $n$ 次正方行列 $A_n$ を次のように定義する．ただし，$n \geq 2$ は自然数である．

- $(i, n+1-i)$ 成分はすべて1である $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
- その他の成分はすべて0である．

(a) $A_2$ の固有値および $A_3$ の固有値を求めよ．もし重解がある場合はその重複度も求めること．

(b) $n \geq 3$ が奇数のとき，$A_n$ の固有方程式と $A_{n-1}$ の固有方程式との関係を導け．

(c) $n \geq 4$ が偶数のとき，$A_n$ の固有方程式と $A_{n-2}$ の固有方程式との関係を導け．

(d) $A_n$ の固有値を求めよ．もし重解がある場合はその重複度も求めること．

(2) $xy$ 平面の部分集合 $S$ を次のように定める．

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \geq y^4\right\}.$$

(a) 集合 $S$ の概形を $xy$ 平面に図示せよ．

(b) 集合 $S$ の面積を求めよ．

**問 2** (1)，(2) の中から１つを選んで解答せよ．

(1) $A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．$A$ を定義域とする１変数関数 $f$ が凸関数であるとは，

任意の $x, y \in A$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して，

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A \quad \text{かつ} \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

となることをいう．

(a) $A$ を定義域とする１変数関数 $f$ が凸関数であるとする．このとき，任意の $x_1, x_2, x_3 \in A$ に対して，また，$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ を満たす任意の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]$ に対して，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

が成り立つことを示せ．

(b) $f(x) = -\log x \ (x > 0)$ は凸関数である．このことを利用して，任意の正の実数 $x_1, x_2, x_3$ に対して，相加相乗平均の不等式

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 壺の中に２個の赤玉と５個の白玉が入っている．７人の人が順番に壺から玉を１個ずつ取り出す．ここで，取り出した玉は壺に戻さない．$1 \leq i < j \leq 7$ とし，$i$ 番目の人と $j$ 番目の人が赤玉を取り出す確率を $p(i,j)$ とおく．

(a) $p(1,2), p(1,3)$ を求めよ．

(b) $p(i,j)$ を求めよ $(1 \leq i < j \leq 7)$．

(c) $k$ 番目の人が赤玉を取り出す確率を求めよ $(1 \leq k \leq 7)$．

(d) 次の２つの期待値を計算せよ．

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 7} i p(i,j), \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq 7} j p(i,j).$$