2024（令和 6）年度 九州大学大学院経済学府修士課程第 II 期入学試験問題
（一般選抜）

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ．

問 1 (1)，(2) の中から 1 つを選んで解答せよ．

(1) A および B を集合とし，f を A から B への写像とする．これを $f: A \to B$ と書く．写像の単射性および全射性は次のように定義される．

- f が単射であるとは，$a_1, a_2 \in A$ について $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$ となることである．
- f が全射であるとは，任意の $b \in B$ に対して，$f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が存在することである．

以下の 3 つの場合それぞれについて，f が

「単射であり，全射である」，　「単射であるが，全射でない」，
「単射でないが，全射である」，「単射でも全射でもない」，

のうちどれであるかをその理由とともに答えよ．

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) $a > 0$ を定数とする．xy 平面上の点 $(a, 0)$ を中心とする半径 a の円周を C とし，円の内部および円周からなる集合を D とする．

(a) 原点 $(0, 0)$ を除く C 上の点は，平面の極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を用いて，

$$r = 2a\cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されることを示せ．

(b) 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

(c) 次の広義の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$

問 2 (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ.

(1) $n \geq 2$ を自然数とする. n 次元実ベクトル空間の部分集合 A が凸集合であるとは,

任意の $x, y \in A$ と任意の実数 $\alpha \in [0,1]$ に対して, $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$

となることをいう.

(a) A, B がともに n 次元実ベクトル空間の凸集合であるとき, その共通集合 $A \cap B$ も凸集合となることを示せ.

(b) 次の命題

A, B がともに n 次元実ベクトル空間の凸集合であるとき, その和集合 $A \cup B$ も凸集合となる

が正しいならばそのことを証明し, そうでない場合は反例を挙げよ.

(2) 離散型確率変数 X が確率関数

$$f(x) = p(1-p)^x, \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

をもつ確率分布に従うことを $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ と表すことにする. ただし, $p \in (0,1)$ は定数である.

(a) $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ のとき, 期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.

(b) $n \geq 2$ を自然数とする. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立同一に $\mathrm{Ge}(p)$ に従っているとする. 次の和で定義される確率変数 Y_n について, 期待値 $E(Y_n)$ および分散 $V(Y_n)$ を求めよ.

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

(c) 問 (b) で $n = 2$ の場合を考える. 確率変数 Y_2 が従う確率分布の確率関数を求めよ.

(d) $n \geq 3$ とする. 問 (b) で定義された Y_n が従う確率分布の確率関数を求めよ.