2025（令和 7）年度 九州大学大学院経済学府修士課程第 I 期入学試験問題 (一般選抜)

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ．

問 1 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ．

(1) $\boldsymbol{R}^4$ の部分集合 $W_{\alpha,\beta}$, V を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha,\beta} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = \alpha, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = \beta \end{array} \right\}, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, \\
V &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

(a) $W_{\alpha,\beta}$ が $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間となる α, β は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は α, β と $W_{\alpha,\beta}$ の次元と基底を求めよ．

(b) $W_{0,0} \cup V$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間となるか．理由を明確にして答えよ．また，部分空間となる場合は $W_{0,0} \cup V$ の次元と基底を求めよ．

(2) a, b, c を正の定数とし，以下の関数 $f(x)$, $g(x)$ について考える．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{ax+b} - cx, \quad x \in \boldsymbol{R}, \\
g(x) &= f(|x|), \quad x \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}
$$

(a) $f(x)$ の原点における微分係数 $f'(0)$ を求めよ．

(b) $g(x)$ の原点における右微分係数 $g'_+(0)$ は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は求めよ．

(c) $g(x)$ の原点における左微分係数 $g'_-(0)$ は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は求めよ．

(d) $a = 2$, $b = 3$ とする．$g(x)$ が原点において微分可能となる c は存在するか．理由を明確にして答えよ．また，存在する場合は c を求めよ．

問 2 (1), (2) の中から1つを選んで解答せよ．

(1) a_{ij}, b_i, $c_j (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ を実数とする．実数を成分とする行ベクトルの集合 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ (y_1, y_2) \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leq c_3 \end{array} \right\}.$$

以下の最小化問題 (P)，最大化問題 (D) について考える．

$$\text{(P)} \min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathcal{X}} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad \text{(D)} \max_{(y_1,y_2)\in\mathcal{Y}} b_1y_1 + b_2y_2.$$

(a) $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$ のとき，$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \geq b_1y_1 + b_2y_2$ は成立するか．成立する場合は証明し，成立しない場合は反例を挙げよ．

(b) $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$ が $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 = b_1y_1+b_2y_2$ を満たすとき，(x_1, x_2, x_3) は問題 (P) の最適解となること証明せよ．

(c) $\mathcal{Y}$ は空集合ではないが，問題 (D) の最適解が存在しないとする．このとき，$\mathcal{X}$ は空集合となるか．理由を明確にして答えよ．

(2) 確率変数 X_1, X_2 は独立とし，それぞれ，パラメータ $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ のポアソン分布に従うとする．なお，確率変数 X がパラメータ $\alpha > 0$ のポアソン分布に従うとは，X は0または自然数に値をとり，以下の式を満たすことである．

$$P[X = k] = \frac{\alpha^k}{k!}\beta(\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

ここで $P[\cdot]$ は確率を意味し，β は非負の値をとる関数である．

(a) 関数 β を求めよ．

(b) X_1 の平均と分散を α_1 を用いて表せ．

(c) c を1ではない正の定数とし，$Y_1 = cX_1$ とする．Y_1 はポアソン分布に従うか．理由を明確にして答えよ．また，ポアソン分布に従う場合は，そのパラメータを α_1 を用いて表せ．

(d) $Y_2 = X_1 + X_2$ とする．Y_2 はポアソン分布に従うか．理由を明確にして答えよ．また，ポアソン分布に従う場合は，そのパラメータを α_1, α_2 を用いて表せ．

(e) $Y_3 = X_1 - X_2$ とする．Y_3 はポアソン分布に従うか．理由を明確にして答えよ．また，ポアソン分布に従う場合は，そのパラメータを α_1, α_2 を用いて表せ．

(f) $Y_4 = X_1X_2$ とする．Y_4 はポアソン分布に従うか．理由を明確にして答えよ．また，ポアソン分布に従う場合は，そのパラメータを α_1, α_2 を用いて表せ．