

マクロ経済学

次の2問について、すべて解答しなさい。

問1 人口成長と技術進歩のある離散時間のソローモデルを考える。第 t 期の実質 GDP (Gross Domestic Product) を Y_t 、資本ストックを K_t 、技術水準を A_t 、労働人口（以下では単に「人口」とよぶ）を L_t で、それぞれ表す。資本減耗率を δ とおく。また、生産関数を $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ で表す。この生産関数は1次同次であると仮定する。第 t 期の効率労働1単位当たりの資本ストックを k_t で表し、第 t 期の効率労働1単位当たりの GDP を y_t で表す。すなわち、以下が成り立つ。

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$$

生産関数の1次同次性より、 $f(k_t) \equiv F(k_t, 1)$ と定義すれば、 $y_t = f(k_t)$ が成り立つ。関数 $f(k_t)$ は以下の（通常の）仮定を満たすものとする：

$$f'(k_t) > 0, \quad f''(k_t) < 0, \quad \lim_{k_t \rightarrow 0} f(k_t) = 0, \quad \lim_{k_t \rightarrow +\infty} f(k_t) = +\infty$$

人口成長率を n 、また技術進歩率を g^A とおく。すなわち、以下が成り立つ。

$$n = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t}, \quad g^A = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t}$$

上記で表される経済に関して、以下の問いに答えよ。導出過程の詳細を明示すること。

- (1) 定常状態における資本ストック k^* が満たす式を求めよ。ただし、 k^*, δ, g^A, n, s のみを用いて表すこと。
- (2) 横軸に k_t をとった平面上に k^* を図示せよ。
- (3) 定常状態における一人当たり資本ストックの成長率 g^k を求めよ。
- (4) 定常状態における一人当たり GDP の成長率 g^y を求めよ。

問2 公債発行が経済に及ぼす影響を考える。各世代の効用が自分と子供（次世代）世代の効用によって決定される利他的な家計を考える。 C を消費、 $u(C)$ を自らの消費からの効用、 U_1 を子供の効用（下付きの「1」は1期後の世代を表し、「2」以降も同様である）、 β ($0 < \beta < 1$) を定数とすると、現在世代の効用関数は $U = u(C) + \beta U_1$ のように表せる。子供の効用関数も同様に表すことができる。

(1) このとき、現在世代の効用関数を $\beta, u(C), u(C_1), U_2$ を用いて表せ。ただし、 C_1 は子供の消費。

(2) (1)のような計算を繰り返すとき、現在世代の効用はどのように表されるかを示せ。現在世代の効用にはどのような特徴があるのかを論じよ。

B_{-1} を現在世代の親世代から相続された遺産、 r を利率（すべての世代で一定）、 Y を現在世代の所得、 T を税金（一括税）、 B を子供への遺産とすると、現在世代の予算制約は $B = (1+r)B_{-1} + Y - C - T$ と表せる。子供世代の予算制約は、 $B_1 = (1+r)B + Y_1 - C_1 - T_1$ と表すことができる（ただし Y_1 を子供の所得、 T_1 を子供の税、 B_1 を孫に残す遺産とする）。 B を消去して2つの予算制約式をまとめると、2世代にまたがる予算制約式は

$$C + \frac{C_1}{1+r} + \frac{B_1}{1+r} = (1+r)B_{-1} + \left(Y + \frac{Y_1}{1+r} \right) - \left(T + \frac{T_1}{1+r} \right)$$

と表される。

(3) 同様の計算を繰り返すことにより、どのような式が得られるのかを示せ。また、その予算制約式を説明せよ。

ここで、現在世代に対して b の減税を行い、その分を公債で賄うとする。また公債の償還財源は将来世代に対する増税で調達されるとする。当該世代に対する減税と将来世代に対する増税の割引現在価値は等しくなるので、 ΔT_1 を子供に対する増税、 ΔT_2 を孫に対する増税とすると、

$$b = \frac{\Delta T_1}{1+r} + \frac{\Delta T_2}{(1+r)^2} + \dots$$

と表せる。

(4) このとき、すべての世代にわたる税の割引現在価値が公債を発行する前と後で等しくなることを数式で示し、公債発行が経済に及ぼす影響を論じよ。

(5) このとき、減税分 b はどうなるのかを論ぜよ。