

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ.

問 1 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) A を 3 次実正方行列, E を 3 次の単位行列とし, O を 3 次正方零行列とする. いま, A は $A^5 = O$ を満たすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (a) A の逆行列が存在するならばそれを求め, そうでないときはその理由を述べよ.
- (b) $E - A$ の逆行列が存在するならばそれを求め, そうでないときはその理由を述べよ.
- (c) $3E + 2A$ の逆行列が存在するならばそれを求め, そうでないときはその理由を述べよ.

(2) xy 平面における集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq y\}$$

と定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (a) D が表す領域を xy 平面に図示せよ.
- (b) 極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

を用いて D を表すとき, r と θ の範囲はどうなるか. それぞれについて答えよ.

(c) xyz 空間における集合 S, D' を

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq y\}$$

と定める. このとき, S と D' の共通部分の体積を求めよ.

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) a を実数の定数として, 次の線形計画問題 (P_a) を考える.

$$\begin{aligned} (P_a) \quad & \text{最小化} \quad z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + ax_4 \\ & \text{制約条件} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ & \quad \quad \quad 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (a) x_1, x_3 を基底変数とする (P_a) の基底解を求めよ.
- (b) (a) で求めた基底解から単体法を実行し, (P_{-2}) に対する最適解と最適値を求めよ.
- (c) (b) で求めた解が (P_a) の最適解となるのは, a がどのような値をとるときか答えよ.

(2) n を自然数とする. コインを n 回投げて表の出た回数を Y_n とする. コイン投げの結果は互いに独立とし, 表の出る確率を p ($0 < p < 1$) とする. このとき, 以下の α_n について考える.

$$\alpha_n = 2 \int_0^n x P[Y_n \geq x] dx.$$

ここで $P[A]$ は事象 A の確率を意味する.

- (a) Y_n, Y_n^2 の期待値を n, p を用いて表せ.
- (b) α_1, α_2 を p を用いて表せ.
- (c) $n \geq 3$ のとき, α_n を n, p を用いて表せ.