

経済数学

次の 2 問の両方について解答せよ。

問 1 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ。

(1) 以下の行列 $A(x, y, z)$ について考える。

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & 2 & z \\ y & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

- (a) ある自然数 m に対して $A(2a, a, a)^m$ が零行列となる実数 a は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合はすべて求めよ。
- (b) $A(x, y, z)$ が交代行列となる (x, y, z) は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合はすべて求めよ。
- (c) $C = A(2, 3, 3) - B$ とするとき、 C が交代行列となる対称行列 B は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合はすべて求めよ。

(2) 以下の 2 変数関数について考える。

$$f(a, n) = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x+a) - \sin(x)|^n dx, \quad 0 < a < \pi, \quad n \in \mathbf{N}.$$

- (a) $n \rightarrow \infty$ のとき、 $f(a, n)$ の極限值は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合は求めよ。
- (b) $a \rightarrow 0$ のとき、 $f(a, n)$ の極限值は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合は求めよ。
- (c) 次の極限值は存在するか。理由を明確にして答えよ。また、存在する場合は求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a, 2025)}{|\sin(a)|^{2025}}.$$

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1) 以下の関数 $f(x, y)$ について考える.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c.$$

ここで, a, b, c は正の実数とする. また, 3 点 $(0, b), (2a, -2b), (-a, -2b)$ を頂点に持つ三角形の境界を T とする.

- (a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ のとき, $f(x, y)$ は極値を持つか. 理由を明確にして答えよ. また, 極値を持つ場合は, その値とその値を与える点を求めよ.
- (b) $(x, y) \in T$ のとき, $f(x, y)$ の最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は, その値とその値を与える点を求めよ.
- (c) D を T とその内部とする. $(x, y) \in D$ のとき, $f(x, y)$ の最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は, その値とその値を与える点を求めよ.

(2) 確率密度関数 $f(u)$ が以下によって与えられる確率変数 U について考える.

$$f(u) = \begin{cases} x, & 0 \leq u \leq a, \\ y, & a < u \leq 1. \end{cases}$$

ここで, a, x は $0 < a < 1, 0 \leq x \leq 1/a$ を満たす実数とする.

- (a) y を a, x を用いて表せ.
- (b) U の期待値を a, x を用いて表せ.
- (c) $a = 1/2$ とする. $x \in [0, 2]$ のとき, U の分散の最大値, 最小値は存在するか. 理由を明確にして答えよ. また, 存在する場合は, その値とその値を与える x を求めよ.