

マクロ経済学

次の2問について、すべて解答しなさい。

問題1 家計の効用が消費だけではなく、貨幣保有にも依存しているような2期間モデルを考える。ここで、各期の家計の効用関数は以下のように与えられる。

$$U(c_1, m_1, c_2, m_2) = \ln c_1 + \mu \ln m_1 + \frac{1}{1+\rho} [\ln c_2 + \mu \ln m_2].$$

ただし c_t は各期の消費を、 m_t は実質貨幣保有（つまり $m_t = M_t/p_t$ ）を表す。 $\mu > 0$ および $0 < \rho < 1$ はともに家計の選好に関するパラメーターである。また $\ln$ は自然対数を表す。

各期の家計の行動は以下のように定式化される。

第1期：はじめに家計は M_0 の名目貨幣と B_0 の名目債券を保有する。 M_0 と B_0 はともに家計にとって所与である。債券の名目利子率は i_1 で表され、家計は $i_1 B_0$ の所得を得る。また家計は生産活動に従事し、 $p_1 y_1$ の名目所得を得る。ただし p_1 は第1期の物価水準、 y_1 は実質所得である。家計はこれらの初期資産と所得をもとに、 $p_1 c_1$ の名目消費を行い、期末に B_1 の名目債券を購入し、 M_1 の名目貨幣を保有する。

第2期：はじめに家計は M_1 の名目貨幣と B_1 の名目債券を保有する。第1期と同じく、債券の名目利子率は i_2 で表され、家計は $i_2 B_1$ の所得を得る。また家計は生産活動に従事し、 $p_2 y_2$ の名目所得を得る。ただし p_2 は第2期の物価水準、 y_2 は実質所得である。家計はこれらの資産と所得をもとに、 $p_2 c_2$ の名目消費を行い、期末に M_2 の名目貨幣を保有する。ただし2期間で家計の意思決定は終了するため、家計はこの期に名目債券を購入しない（つまり $B_2 = 0$ ）。

最後に本問では、 b_t は実質債券保有（つまり $b_t = B_t/p_t$ ）を、 π_t はインフレ率（つまり $\pi_t = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}$ ）を表すものとする。このとき以下の各問に答えなさい。なお解答にあたっては式の導出過程（式変形）を詳しく記述するとともに、言葉による説明を加えること。

- (1) 名目で表した第1期の予算制約式を書きなさい。
- (2) (1)で得られた名目での第1期の予算制約式の両辺を p_1 で割り、実質化しなさい。実質で表した第1期の予算制約式を m_0 、 b_0 、 c_1 、 y_1 、 m_1 、 b_1 、 i_1 および π_1 を用いて表しなさい。
- (3) (1)および(2)と同様にして、実質で表した第2期の予算制約式を m_1 、 b_1 、 c_2 、 y_2 、 m_2 、

i_2 および π_2 を用いて表しなさい。

- (4) 家計の生涯効用最大化問題のラグランジュ関数を示しなさい。
- (5) 第1期の最適な消費 c_1^* と第2期の最適な消費 c_2^* の関係を表すオイラー方程式を導出しなさい。
- (6) 第1期の最適な消費 c_1^* と第1期の実質貨幣保有 m_1^* の比率（つまり c_1^*/m_1^* ）と名目利子率 i_2 の満たす関係式を導出しなさい。

問題2 第1期と第2期からなる2期間の投資決定モデルを考える。財は1種類のみであり、消費財と資本財の区別は存在しない。財の価格は2期間を通じて1である。企業は、第 t 期の期初に保有する資本ストック K_t のみを用いて、財を生産する。生産関数は第1期と第2期で共通であり $Y_t = F(K_t)$ で与えられる。生産関数 F は2階微分可能であり、任意の $K > 0$ について $F'(K) > 0$ および $F''(K) < 0$ を満たす。また $\lim_{K \rightarrow \infty} F'(K) = 0$ であるとする。

第1期の期初に企業は所与の資本ストック $K_1 > 0$ を用いて生産を行う。その後、第1期末に設備投資 $I \geq 0$ を行う。第1期の期初の資本ストック K_1 は、第1期末までに $\delta \in [0,1]$ の割合だけ減耗する。設備投資と資本減耗の結果、第2期の期初の資本ストックは $K_2 = (1 - \delta)K_1 + I$ となる。

企業が設備投資を行う際には、財の購入費用 I に加えて、調整費用が発生するものとする。したがって第1期の設備投資費用の総額は

$$C(I; K_1) = I + \frac{\phi I^2}{2 K_1}, \quad \phi \geq 0$$

で与えられる（右辺第2項が調整費用を表す）。

企業は第2期において、期初の資本ストック K_2 を用いて生産を行う。第2期の期末に企業は解散し、残存資本ストック $(1 - \delta)K_2$ は、1単位あたり1の価格で売却される。この売却に費用は発生せず、また売却収入は第2期の利潤に含まれるものとする。第2期には新たな設備投資は行われぬ。

第1期の設備投資 I は、企業価値を最大にするように決定される。ここで企業価値は、2期間の利潤の割引現在価値の和として定義される。第1期の利潤は第1期の期末に、また第2期の利潤は第2期末にそれぞれ実現する。第1期末から第2期末までの1期間の利子率を $r > 0$ とし、企業価値は第1期末を基準として評価されるものとする。

上記のモデルに関して、以下の各問に答えなさい。なお解答にあたっては式の導出過程（式変形）を詳しく記述するとともに、言葉による説明を加えること。

- (1) 第1期の利潤 $\pi_1(I)$ を、 I 、 K_1 、 ϕ 、および F のみを用いて表しなさい。
- (2) 第2期の利潤 $\pi_2(I)$ を、 I 、 K_1 、 δ 、および F のみを用いて表しなさい。
- (3) (1)と(2)の結果を用いて、企業価値 $V(I)$ を設備投資 I の関数として表しなさい。さらに

$V'(I)$ と $V''(I)$ を求め、 $V''(I)$ の符号を示しなさい。この結果が内点の一階条件 $V'(I^*) = 0$ を満たす解の最適性と一意性について何を意味するか、説明しなさい。

- (4) 設備投資 I のもとでのトービンの限界 q を

$$q \equiv \frac{F'(K_2) + (1 - \delta)}{1 + r}$$

と定義する。企業の最適な設備投資を I^* 、そのもとでの限界 q を q^* とおく。最適設備投資が内点解 $I^* > 0$ であるとき、以下の問いに答えなさい。

- (a) $\phi = 0$ である（すなわち調整費用が存在しない）とき、 q^* の値を導出しなさい。
(b) $\phi > 0$ である（すなわち調整費用が存在する）とき、 q^* を I^* 、 K_1 、 ϕ で表したうえで、 q^* と1との大小関係を示しなさい。

- (5) 生産関数が $F(K) = 3\ln(1 + K)$ で与えられ、 $K_1 = 2$ 、 $\delta = 1/2$ 、 $r = 1/5$ 、 $\phi = 1/2$ であるとする（ $\ln$ は自然対数を表す）。このとき、最適設備投資 I^* 、第2期の期初の最適な資本ストック K_2^* 、最適設備投資のもとでの限界 q^* を求めなさい。