

経済数学

次の2問の両方について解答せよ。

問1 (1), (2)の中から1つを選んで解答せよ。

(1) 以下によって定まる数列  $\{x_n\}$  について考える。

$$x_0 = 3, x_1 = 3, x_2 = 11, \\ x_{n+3} - 3x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

このとき以下の設問に答えよ。

(a) ベクトル  $y_n$  を

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と定める。このとき、

$$y_{n+1} = Ay_n$$

を満たす行列  $A$  を求めよ。

(b)  $A$  の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。なお固有ベクトルについては、第1成分が1となるようにして答えよ。

(c)  $n$  を非負の整数とすると、(b)の結果を利用して  $x_n$  を求めよ。

(2)  $xy$  平面における集合  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$$

と定める。このとき以下の設問に答えよ。

(a)  $D$  が表す領域を  $xy$  平面に図示せよ。

(b) 関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $z \in \mathbf{R}$  に対して

$$f(z) = \iint_D (x + yz)^4 dx dy$$

と定義する。重積分を計算して  $f(z)$  を求めよ。

(c) (b) で得られた  $f(z)$  が最大値と最小値を持つかどうかを理由をつけて答え、持つ場合にはその値を求めよ。

問 2 (1), (2) の中から 1 つを選んで解答せよ.

(1)  $x_1, x_2, x_3$  を変数とする次の線形計画問題を考える.

$$\begin{array}{ll} (P_1) \text{ 最小化} & -x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ & 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

問題  $(P_1)$  にスラック変数を導入して次の等価な問題に変換する.

$$\begin{array}{ll} (P_2) \text{ 最小化} & -x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ & 2x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array}$$

このとき以下の設問に答えよ.

- (a)  $(P_1)$  の実行可能領域の頂点を全て求めよ.
- (b)  $(P_1)$  の最適解を求めよ.
- (c)  $(P_2)$  の双対問題を求めよ. これを問題  $(D)$  とする.
- (d)  $(D)$  の最適解を求めよ.

(2) 非負の値をとる確率変数  $X$  を考える.  $X$  の確率分布は以下によって与えられるとする.

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b 2e^{-2x} dx, \quad 0 \leq a \leq b < \infty.$$

ここで,  $P[F]$  は事象  $F$  の確率を意味する. また, 確率変数  $Y$  を以下によって定義する.

$$Y = \min(X, 2).$$

$R^2$  の点  $A(-4, 7)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(Y, 2Y^2)$  を頂点とする三角形  $ABC$  について考える. このとき以下の設問に答えよ.

- (a)  $Y$  の期待値を求めよ.
- (b)  $\angle ACB$  が直角となる確率を求めよ.
- (c)  $\angle ACB$  が鋭角となる確率を求めよ.
- (d) 三角形  $ABC$  の外接円の中心を  $O$  とするとき,  $O$  が三角形  $ABC$  の外部に存在する確率を求めよ.